Szakdolgozat

Sándor Zsolt

Debreceni Egyetem
Informatikai Kar
Informatika tanár szak

A MAPLE BEVEZETÉSE A MATEMATIKA OKTATÁSÁBA

Témavezető:
Dr. Nyakóné dr. Juhász Katalin
tudományos főmunkatárs

Készítette:
Sándor Zsolt

Debrecen

2007

Tartalomjegyzék

Bevezető

Szakdolgozatomban egy olyan szoftvert szeretnék bemutatni (a teljesség igénye nélkül), amelynek használata remek lehetőséget a számítástechnika alkalmazására az oktatásban. A program elsősorban a matematikában nyújt lehetőséget a szemléletes oktatásra. De nemcsak az oktatásban, hanem tudományos munkákban is segítséget nyújthat. Ez annak köszönhető, hogy bonyolult műveletek elvégzésére is alkalmas, de mégis barátságos felhasználói környezetet is biztosít a használójának. Egyben komoly lehetőségeket biztosít, hogy a gyerekek megismerkedjenek különböző felhasználói programokkal, és ily módon a számítógéppel való kapcsolatuk ne merüljön ki az elektronikus játékokban. Ez a szoftver a MAPLE, amely nemcsak a diákok részére lehet hasznos, hanem a tanárok munkáját is megkönnyítheti, hiszen egyszerűen és gyorsan ellenőrizhetik a feladatok megoldását, valamint könnyen létrehozhatnak új feladatokat is.

Mivel matematika szakot is végeztem, ezért különösen érzem a program által nyújtott lehetőségek hasznosságát. Gyerekoromtól kezdve szívesen foglalkoztam matematikával, főleg az érdekesebb feladatokkal. Ezek ellenőrzése, illetve az egyes lépések kiszámításában azonban néha vétettem. Hiába volt a megoldás menete tökéletes, az egyes részeredmények hibái miatt a végeredmény is hibás volt. Amikor elkzdtem érdeklődni a számítástechnika iránt, korán felmerült bennem, hogy hogyan lehetne a számítástechnika eszközeivel megkönnyíteni a feladat megoldását, ellenőrzését. Első gondolatom – mint a diákok többségének – az volt, hogy a probléma, feladat megadása után a program egyből kiírja az eredményt, és ha szükséges a megoldáshoz vezető utat is. Nyilván ehhez rengeteg időnek kell még eltelni, és sokat kell még fejlődnie a programozásnak és a mesterséges intelligencia tudományágnak. Ugyan a feladatok megoldásmenetét még nem lehet a programokkal kikövetkeztetni, de az egyes számításokat már könnyedén el lehet végeztetni velük. A programmal – illetve más hasonló programokkal – a részszámítási hibák kiküszöbölhetők, és könnyebbé válik a feladatok megoldása. Ugyanakkor megmarad a matematika szépsége, ugyanis nekünk kell elvégezni a lényegi részt. Azaz koncentrálhatunk a feladat megoldására, a részszámításokat, ellenőrzéseket pedig elvégeztethetjük a MAPLE-lel.

A MAPLE ismertetése

A MAPLE- t 1980-ban kezdték el fejleszteni a kanadai Waterloo Egyetemen. Nevét a kanadai nemzeti szimbólum – juharlevél – angol nevéről kapta.

A MAPLE számítógép–algebrai nyelv, ami azt jelenti, hogy a matematkai műveleteket nem csak numerikus és lebegőpontos aritmetikával, hanem – ahol ez lehetséges – konkrét, illetve formális változókkal is el lehet végezni. A formális változók megjelenése matematikailag hatalmas előnyt jelentett, hiszen a formális változók elvileg bármilyen matematikai objektumok lehettek; pédául halmaz, függvény, vektor, mátrix, operátor, kifejezés, grafikon, stb.

Talán ez az egyik oka, hogy ma már a kategóriája egyik vezető szoftvere. A másik oka az lehet, hogy eljárásainak nagy többsége a MAPLE saját nyelvén íródott, és a felhasználók számára ezek forrásnyelven hozzáférhetők. Így minden felhasználónak lehetősége van a rendszer eljárásainak módosítására, akár új eljárások, függvények létrehozására.

Egy 1995-ös felmérés szerint már közel 400 000 ember használta (fejlesztette?) a programot.

A programmal való kommunikálás utasítások kiadásával történik. Az utasításokat a „>” jel után kell begépelni. Az utasítások szerkezete: az utasítás vagy függvény neve, utána () alakú zárójelben a paramétereket kell vagy lehet megadni. Az utasítást ; (pontosvessző) vagy : (kettőspont) jellel kell lezárni. Kettőspont jellel lezárt utasítás végrehajtódik ugyan, de az nem íródik a képernyőre.

A MAPLE még különbséget tesz kis és nagy kezdőbetűs parancsok között is. A nagy kezdőbetűs parancsoknál csak kijelöli a műveletet, de nem hajtja végre. A MAPLE aritmetikai kifejezéseinek a felépítése hasonlít más programozási nyelvekéhez. Ugyanúgy kell jelölni az összeadást, kivonást stb. A zárójelezésnél csak a kerek () zárójeleket lehet használni, ugyanis a többi fajta zárójelnek egyéb funkciója van.

A MAPLE–rendszer ismer még fontosabb matematikai változókat, például „e”, „π” stb. A rendszerbe vannak beépített függvények is (például szinusz, kotangens, stb.), és ezeknek megvan az az előnye, hogy a program ismeri ezek differenciálhányadosát és integrálját is. Míg ha egy új függvényt definiálunk, akkor a rendszert meg kell tanítani a definiált függvények differenciálhányadosára és integráljára.

Most nézzünk néhány egyszerűbb példát, hogy hogyan dolgozik a MAPLE.

Számábrázolás

Nézzük meg, hogy a MAPLE hogyan ábrázolja a számokat. A rendszer előnye, hogy az egész, a racionális, a valós és a komplex számok is pontosan ábrázolja. Ezt úgy éri el a valós és komplex számoknál, hogy az őket előállító kifejezésekkel ábrázolja.

Nézzük meg először az egészeket.

- 30!;

$$265252859812191058636308480000000$$

Láthatjuk, hogy a MAPLE kiszámolta mind a 33 jegyet. Ezzel azonban korántsem használtuk ki a MAPLE–t, hiszen kb. 500 000 (!) jegyű egész számok ábrázolására képes.

- i factor(");

$$(2)^{26}\,(3)^{14}\,(5)^{7}\,(7)^{4}\,(11)^{2}\,(13)^{2}\,(17)\,(19)\,(23)\,(29)$$

Az i factor parancs előállítja az egész számok prímtényezős felbontását, ami prímek hatványainak a szorzata. Az “ (idézőjel) jel az előző parancssorban lévő értékre utal. Ezt három idézőjelig, azaz három parancssorral előbbi értékre utalásig tehetjük meg.

- expand(");

Az eljárással a kijelölt műveletet végeztethetjük el.

$$265252859812191058636308480000000$$

Folytassuk a vizsgálatainkat a racionális számokkal.

- -8/18;

$$\frac{-4}{9}$$

Láthatjuk, hogy a MAPLE nem végezte el a kijelölt osztás műveletét, hanem egyszrűsítette a tört értékét a legnagyobb közös osztó értékével. Ha elvégezte volna az osztást, akkor az említett pontosságát veszítette volna el a MAPLE.

- op(");

$$-4, 9$$

Az op eljárás a paraméterként megadott objektum összetevőit mutatja meg. Ezt az ábrázolást a racionális számok kanonikus alakban való ábrázolásának nevezzük.

Most nézzük meg mi a helyzet a valós számoknál.

- s:=sqrt(2);

$$s := \sqrt{2}$$

- Digits:=20;

$$Digits := 20$$

- evalf(s);

$$1.4142135623730950488$$

Itt első lépésben kijelöltük a műveletet, majd az ***evalf*** eljárással számoltuk ki a közelítő értéket. Az eljárás második paramétere adja meg, hogy hány jegy pontosságig történjen ez. Ha nem adunk meg második paramétert, akkor ezt a ***Digits*** eljárás határozza meg, aminek az alapértéke 10.

Nézzük most a komplex számokat:

- k:=sqrt(-1);

$$k := I$$

- evalc((2+3*I)*(3+6*I));

$$-12 + 21\,I$$

- evalc (Re("));

$$-12$$

- evalc(Im(""));

$$21$$

Láthatjuk, hogy a MAPLE a komplex számokat I=$\sqrt{-1}$ szimbólum segítségével ábrázolja. Az ***evalc*** függvény segítségével történik a komplex számok kiértékelése. A komplex számok valós és képzetes részét az ***evalc(RE()), evalc(Im())*** függvények adják. Az új verziókban a valós és képzetes rész meghatározásánál már az ***evalc*** függvény elhagyható.

Számítások

A rendszer előnyei a matematikai számítások terén is megmutatkoznak. Többek között könnyedén egyszerűsíthetünk különböző kifejezéseket.
Például egyszerűsítsük a következő kifejezést:

$$\frac{(x^2 - y^2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x + y)(x - 1)^2}$$

Első ránézésre nem néz ki túl egyszerűnek, de itt jön a MAPLE nagyszerűsége. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

➢ (x^2-y^2)*(x^3-3*x^2+3*x-1)/(x+y)/(x-1)^2;

$$\frac{(x^2 - y^2)(x^3 - 3x^2 + 3x - 1)}{(x + y)(x - 1)^2}$$

➢ factor(");

$$-(y - x)(x - 1)$$

➢ expand(");

$$-y x + y + x^2 - x$$

➢ factor(");

$$-(y - x)(x - 1)$$

A ***factor*** eljárás az első esetben egyszerűsítette a kifejezést, az ***expand*** eljárás pedig összeggé alakította a szorzatot. A második alkalommal a ***factor*** eljárás az összeget szorzattá alakította. Ilyen egyszerű módon tud a MAPLE kifejezéseket egyszerűsíteni.

A MAPLE nemcsak diophantoszi és algebrai egyenletek megoldására képes, hanem megtud oldani véges és végtelen integrálokat, differenciálegyenleteket, mátrixokat és polinomokat, de ehhez már komolyabb matematikai és MAPLE jártassági ismeretek szükségesek.

A MAPLE grafikai eljárásai remek lehetőséget nyújtanak függvények ábrázolásához, függvénydiszkussziókhoz, geometriai bizonyításokhoz. Lehetőséget nyújt különböző testek, felületek térbeli (3 dimenziós) ábrázolásához, sőt akár különböző animációk is készíthetők vele.

A MAPLE programozása

A MAPLE egyik nagy előnye, hogy programnyelvként is haszálható. Így bármely felhasználó írhat programokat vagy akár új függvényeket is definiálhat a rengeteg beépített függvényen kívül. A MAPLE programozási nyelve könnyen elsajátítható, hiszen eszközei egyszerűek.
A programozás eszközei a ciklusszervezés, a feltételvizsgálaton alapuló végrehajtás-ütemezés és az eljárások definiálása.

A ciklusszervezés a következő módon történhet:
for *név* ***from*** *kifejezés* ***by*** *kifejezés* ***to*** *kifejezés* ***while*** *kifejezés*
    do
        A ciklusban végrehajtandó utasítások sorozata
    Od

Ahol a *név* a ciklusváltozó nevét jelenti, a ***from*** utáni *kifejezés* a ciklusváltozó indulóértékét adja meg, a ***by*** utáni *kifejezés* a ciklusváltozó lépésenkénti változásának mértékét, a ***to*** utáni *kifejezés* a ciklusváltozó utolsó értékét definiálja, a ***while***- t követő *kifejezés* egy feltételt fogalmaz meg, melynek tejlesülése feltétele a folytatásnak. Ez a forma a legteljesebb, ebből sok rész elhagyható.

Tekintsük a következő példát:

- for i from 2 by 2 to 10 while 10+i <= 16 do
- 2^i;
- od;

$$4 \qquad 16 \qquad 64$$

Mint láthatjuk, az öt lépésből csak három hajtódott végre, mivel a ***while*** feltétel miatt a ciklusból hamarabb léptünk ki.

A feltételvizsgálatot a következő módon tudjuk végrehajtani:

if *logikai kifejezés*

then *a végrehajtandó utasítások*

elif *logikai kifejezések*

then *a végrehajtandó utasítások*

else *a végrehajtandó utasítások*

fi

A feltételrendszer a logikai kifejezésekre érvényes műveleti tábla szerint értékelődik ki.

Ha az ***if*** utáni logikai kifejezés értéke igaz (TRUE), akkor az őt követő ***then*** utáni megadott utasítások hajtódnak végre, ellenkező esetben a rendszer áttér a következő feltétel vizsgálatára, vagy eljut a feltételvizsgálatok befejezését jelentő ***fi*** kulcsszóhoz.

Nézzük a következő példát:

- a:=5:
- if a^2 >=30 then b:=10; elif a^3 <=150 then b:=20 else b:=0 fi;

$$b := 20$$

Láthatjuk, hogy a második feltétel teljesült, ezért a **b** értéke 20 lett.

A MAPLE programozásának az egyik legfontosabb egysége az eljárás. A MAPLE-ben szinte minden függvény eljárásként van megírva.

Nézzünk egy egyszerű példát arra, hogy miként épül fel egy eljárás, és hogyan működik:

- f:=proc(m)
- if m <0 then m^2 else m+3 fi
- end;

f := proc(m) if m < 0 then m^2 else m+3 fi end

- f(4) ; f(-3); f(0);

$$7 \qquad 9 \qquad 3$$

Az eljárások mindig ***:=proc()*** utasítással kezdődik és ***end*** utasítással végződik. Az eljárás mindig az utolsó végrehajtott utasítással tér vissza. Az eljárás által kért és felhasznált adatokat a ***proc()*** utasítás zárójelei között kell felsorolni. Egy eljáráson belül definiálhatók lokális változók, ezek azonban csak az eljáráson belül használhatók.

E rövid ismertető után nézzük meg, hogy hogyan haszálhatjuk a matematika különböző területein a MAPLE- t. A feladatmegoldásokat három részre bontottam szét. A feladatok első része az algebra, a második az analízis, a harmadik pedig a geometria tárgykörébe tartozik.

I. ALGEBRA

1. feladat [4]

Oldjuk meg a következő két ismeretlenes egyenletrendszert a MAPLE segítségével.

$$x - 6\,y = 32$$

1.a megoldás

Az együtthatók: a_{ij}, ahol i,j=1,2 ; a változók: x,y.

Először adjuk meg az egyenletrendszert általánosan. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

- \`első\`:=a11*x+a12*y=b1;

$$e1 := 2\,x + y = 25$$

- \`második\`:=a21*x+a22*y=b2;

Láthatjuk, hogy sikerült létrehoznunk két egyenletet, amelyet az *első,* illetve a *második* nevű változóban tároltuk el.

Észrevehetjük, hogy a MAPLE megenged olyan váltózókat is használni, amiben

$$e2 := x - 6\,y = 32$$

ékezetes betű van. Ezt fordított aposztrófok közé kell írni.

Most helyettesítsünk értékeket az együtthatók helyére. Ezt a MAPLE- ben a ***subs*** eljárás segítségével tehetjük meg.

Az eljárás általános alakja: ***subs(a1=b1, a2=b2, …, kifejezés***)

Ennek hatására a *kifejezés* össze *a1* értékének a helyére *b1*-et helyettesít, majd a keletkező *kifejezés* összes *a2* értékének a helyére *b2*-t helyettesít és így tovább.

- e1:=subs(a11=2, a12=1, b1=25,\`első\`);

$$e1 := 2\,x + y = 25$$

- e2:=subs(a21=1, a22= -6, b2=32, \`második\`);

$$e2 := x - 6\,y = 32$$

Láthatjuk, hogy a ***subs*** nem változtatta meg a kifejezések értékét, hanem csak behelyettesített, majd rendre eltároltuk az egyenleteket az *e1, e2* változókban Most már megoldhatjuk a feladatot. Vonjuk ki az első egyenlet értékéből a második kétszeresét:

- f1:=e1-2*e2;

$$f1 := 13\,y = -39$$

Osszuk el mindkét oldalt 13- mal. Erre a MAPLE- ben az ***lhs(), rhs()*** függvényeket használjuk, amelyek rendre a megadott egyenletek bal (***lhs***), illetve jobb (***rhs***) oldalával térnek vissza.

- f2:=lhs(f1)/13=rhs(f1)/13;

$$f2 := y = -3$$

Most helyettesítsük vissza ezt az értéket az első egyenletbe a már megismert ***subs*** eljárással:

- f3:=subs(f2, e1);

$$f3 := 2\,x - 3 = 25$$

Oldjuk meg az egyenletet az ***lhs, rhs*** függvényekkel!

- f4:=(lhs(f3)+3)/2=(rhs(f3)+3)/2;

$$f4 := x = 14$$

Ez a fajta megoldás nem sokban különbözött az ismert matematikai módszertől.

1.b megoldás

Most nézzük meg, hogy hogyan lehet ezt megoldani úgy, hogy igazán kihasználjuk a MAPLE adta lehetőségeket. Tároljuk az egyenleteket az *e1, e2* változókban:

- e1:=2*x+y=25;

$$e1 := 2\,x + y = 25$$

- e2:=x-6*y=32;

$$e2 := x - 6\,y = 32$$

Most nézzük meg, milyen egyszerűen oldja ezt meg a MAPLE.

- solve({e1,e2},{x,y});

$$\{x = 14, y = \text{-}3\}$$

És már készen is vagyunk! A ***solve({e1, e2, …},{x, y, …})*** utasítással az *e1, e2*, … egyenletredszert azt *x, y*, … változókra oldja meg és annak a megoldásaival tér vissza.

1.c megoldás

Oldjuk meg most a kétismeretlenes egyenletrendszert általánosan is.
Vegyük fel ismét az egyenletrendszer általánosan, majd oldjuk meg a ***solve*** eljárás segítségével.

- \`első\`:=a11*x+a12*y=b1;

$$első := a11\,x + a12\,y = b1$$

- \`második\`:=a21*x+a22*y=b2;

$$második := a21\,x + a22\,y = b2$$

- solve({\`első\`,\`második\`},{x,y});

$$\left\{x = \text{-}\,\frac{a12\,b2 - a22\,b1}{\text{-}a12\,a21 + a22\,a11}, y = \frac{a11\,b2 - b1\,a21}{\text{-}a12\,a21 + a22\,a11}\right\}$$

Láthatjuk, hogy a ***solve*** eljárás általánosan is meg tudta oldani a feladatot és a már ismert megoldáshoz jutottunk.
Ennek segítségével tetszőleges nagyságú egyenletrendszereket meg tudunk oldani, és könnyedén készíthetünk ilyen egyenletrendszereket.

2. feladat[4]

Tudjuk, hogy polinomiális nemlineáris egyenletek megoldására algebrai módszer csak a legfeljebb negyedfokú polinomokra létezik. Ezeket az algoritmusokat, vagyis a másodfokú egyenlet megoldóképletét, a harmadfokú egyenletekre a Cardano-formulat, és a negyedfokúakra a Gauss-algoritmust a MAPLE ismeri.

Nézzünk erre egy példát:

- e:=2*x^3-4*x-82/10=0;

$$e := 2\,x^3 - 4\,x - \frac{41}{5} = 0$$

- solve(e);

$$\%1^{1/3} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{\%1^{1/3}},$$
$$-\frac{1}{2}\,\%1^{1/3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\%1^{1/3}} + \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(\%1^{1/3} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\%1^{1/3}}\right),$$
$$-\frac{1}{2}\,\%1^{1/3} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\%1^{1/3}} - \frac{1}{2}\,I\sqrt{3}\left(\%1^{1/3} - \frac{2}{3}\,\frac{1}{\%1^{1/3}}\right)$$

$$\%1 := \frac{41}{20} + \frac{1}{180}\sqrt{126561}$$

Láthatjuk, hogy itt is eredményre jutott a ***solve*** eljárás. Ebből is láthatjuk a MAPLE nagyszerűségét, hiszen ezt az eredmény ellenőrizni se lenne könnyű nem, hogy még kiszámolni.

3. feladat[3]

Bizonyítsuk be a következő egyenlőséget: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

3.a megoldás

Vegyük fel az *S* és *s* változókat a következőképpen:

- S:=Sum(1/(i*(i+1)),i=1..n);

$$S := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)}$$

- s:=n/(n+1);

$$s := \frac{n}{n+1}$$

Megfigyelhetjük, hogy az ismertetőben említett nagybetűs csendes üzemmódot itt a ***Sum*** eljárásban. Láthatjuk, hogy a csendes üzemmódban csak kijelölte a műveletet és nem végezte el. Tehát most azt kell majd bizonyítanunk, hogy az *S* és az *s* változók egyenlőek.

- \`állítás\`:=S=s;

$$\mathit{állítás} := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i\,(i+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Bizonyítsuk az állítást teljes indukcióval.

Az első lépés az, hogy megnézzük az állítás n=1 teljesül-e. Majd feltesszük, hogy n-re igaz, majd ennek segítségével bizonyítsuk n+1-re az állítást.

➤ subs(n=1,");

$$\sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2}$$

Láthatjuk, hogy 1.-re igaz az állítás. Tegyük fel, hogy n –re igaz az *állítás* és nézzük meg n+1 –re igaz –e. Ehhez használjuk ki, hogy az n+1 –ik összeget előállíthatjuk úgy is, hogy vesszük az első n tag összegét, majd adjuk hozzá az n+1 –ik tagot.

➤ subs(n=n+1,S)=S+1/((n+1)*((n+1)+1));

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

A jobb oldali összeg első tagja az *állítás* bal oldala, ami pedig az indukciós feltevésünk miatt megegyezik az *állítás* jobb oldalán lévő kifejezéssel. Tehát a következő lépésünk az, hogy az előző egyenlőségben behelyettesítjük az *állítás* bal oldalának helyébe jobb oldalát. Ezt a már megtanult ***subs***, ***lhs***, ***rhs*** eljárásokkal tehetjük meg.

➤ subs(lhs(\`állítás\`)=rhs(\`állítás\`),");

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Most már csak annyit kell belátnunk, hogy az egyenlőség jobb oldala megegyezik –e azzal a kifejezéssel, amelyet úgy kapunk, hogy *n* helyére *n+1* –et helyettesítünk az *s* kifejezésben. Ezt a ***testeq*** eljárással tudjuk ellenőrizni, amely a paramétereiként megadott *kifejezések* egyenlőséget vizsgálja a megadott *kifejezés*ben. A visszatérési értéke *true* ha egyenlő *false* ha nem.

➤ testeq(rhs("),subs(n=n+1,s));

true

Ezzel az indukciós bizonyítást befejeztük.

3.b megoldás

Most nézzük meg, hogy a MAPLE ezt milyen egyszerűen meg tudja oldani.

Emlékeztetőül a feladat: $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{n}{n+1}$

- ➢ sum(1/i/(i+1), i=1..n);

$$-\frac{1}{n+1} + 1$$

Korábban használtuk a ***sum*** eljárás csendes formáját, akkor csak kijelöltük a műveletet. Most megfigyelhetjük, hogy az eljárás első argumentuma az összegzendő formulát, a második az összegzés határait adja.

Most használjuk a ***normál*** eljárást, ami a racionális kifejezések egyszerűsítésére szolgál.

- ➢ normal(");

$$\frac{n}{n+1}$$

Máris megkaptuk a kívánt eredményt!

4. feladat [3]

Nézzük meg, hogy a MAPLE segítségével hogyan tudnánk meghatározni egy mértani sorozat első n elemének az összegét általánosan. Tehát határozzuk meg az $s_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ összeget. A sorozat általános tagja, az a_i, amit a következőképpen kaphatunk meg az első tagból:

- ai=a1*q^(i-1);

$$ai = a1\, q^{(i-1)}$$

Ahol a *q* a mértani sorozat hányadosa.

A feladatunk meghatározni a következő összeg értékét:

- Sum(a1*q^(i-1),i=1..n);

$$\sum_{i=1}^{n} a1\, q^{(i-1)}$$

4.a megoldás

Vegyük fel az e1 változóba az összeget, amely az első n tag összege. Az *e2* változóba pedig a *q* szorosukat.

- e1:=sn=";

$$e1 := sn = \sum_{i=1}^{n} a1\, q^{(i-1)}$$

- e2:=q*sn=q*"";

$$e2 := q\, sn = q \left(\sum_{i=1}^{n} a1\, q^{(i-1)} \right)$$

Végezzük el a beszorzást ***combine*** eljárással. Ez az eljárás a MAPLE egyik egyszerűsítési mehanizmusa. Igazi értékét a beépített azonosságok használataival tudja elérni (például: trigonometrikus, logaritmikus).

- e2:=combine(");

$$e2 := q\, sn = \sum_{i=1}^{n} q\, a1\, q^{(i-1)}$$

➢ e2:=normal('',expanded);

$$e2 := q\, sn = \sum_{i=1}^{n} a1\, q^{i}$$

A ***normál*** eljárás a racionális kifejezések egyszerűsítésére szolgál úgy, hogy a racionális törtkifejezéseket faktorizált formára hozza.

Vonjuk ki a két változót egymásból:

➢ e2-e1;

$$q\, sn - sn = \left(\sum_{i=1}^{n} a1\, q^{i}\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a1\, q^{(i-1)}\right)$$

Vonjuk össze az egyenlet jobb oldalon található értéket. Ezt is a ***combine*** eljárással tehetjük meg a legkönnyebben:

➢ lhs('')=combine(rhs(''));

$$q\, sn - sn = \sum_{i=1}^{n} \left(a1\, q^{i} - a1\, q^{(i-1)}\right)$$

Észrevehetjük, hogy az egyenlet jobb oldalán álló összegben csak két tag marad, a többi kiesik, vagyis az i=0 és az i=n esetben maradnak meg a tagok. Beszéltünk a parancsok csendes formájáról az ismertetőben. Ebben a feladatban is így használtuk a ***sum*** eljárást. Most viszont arra lenne szükségünk, hogy mégis végrehajtódjon az utasítás. A MAPLE erre is lehetőséget ad a ***value*** eljárás segítségével. Az eljárás kiértékeli a csendes formában kiadott parancsokat. Most nekünk is erre van szükségünk.

➢ value('');

$$q\, sn - sn = \frac{a1\, q^{(n+1)}}{q} - a1$$

Egyszerűsítsük le a jobb oldalt az előbbiekben már használt ***normal*** eljárással.

➢ normal('',expanded);

$$q\, sn - sn = a1\, q^{n} - a1$$

Most, már csak az a feladatunk, hogy kifejezzük az *sn* –t. Ehhez először alakítsuk szorzattá a kifejezéseket a már említett ***factor*** eljárással.

- factor(");

$$sn\,(q-1)=a1\,(q^n-1)$$

Most, már csak el kell osztani mindkét oldalt *(q –1)* –el.

- lhs(")/(q-1)=rhs(")/(q-1);

$$sn=\frac{a1\,(q^n-1)}{q-1}$$

Láthatjuk, hogy az ismert eredményre jutottunk, tehát a mértani sorozat első n tagjának az összege:

$$sn:=\sum_{i=1}^{n} a1\,q^{(i-1)}=\frac{a1\,(q^n-1)}{q-1}$$

4.b megoldás

Nézzük meg, hogyan lehetett volna ezt a feladatot megoldani úgy, hogy teljes mértékben kihasználjuk a MAPLE adta lehetőségeket. Adjuk ki a ***sum*** eljárás nem csendes formáját, majd egyszerűsítsük a ***normal*** eljárás segítségével és alakítsuk szorzattá a kifejezést a ***factor*** eljárással. Ha minden igaz, akkor már készen is vagyunk. Próbáljuk ki ezt a megoldást:

- sn:=sum(a1*q^(i-1),i=1..n);

$$sn:=\frac{a1\,q^{(n+1)}}{q\,(q-1)}-\frac{a1}{q-1}$$

- sn:=normal(",expanded);

$$sn:=\frac{a1\,q^n-a1}{q-1}$$

- sn:=factor(");

$$sn:=\frac{a1\,(q^n-1)}{q-1}$$

Láthatjuk, hogy így is ugyanazt a megoldást kaptuk csak most a MAPLE dolgozott helyettünk és nemcsak a segítségünkre volt.

5. feladat[3]

Az ismetetőben beszéltünk róla, hogy a MAPLE tudja kezelni a komplex számokat is.

Nézzünk most erre egy feladatot. Számítsuk ki a következő kifejezést, határozzuk meg a komplex szám valós és képzetes részét

(1+tan(alpha)*I)/(1-tan(alpha)*I);

$$\frac{1 + I\tan(\alpha)}{1 - I\tan(\alpha)}$$

Láthatjuk, hogy a MAPLE ismeri a görög betűket is. Most értékeljük ki a komplex számot az ***evalc*** eljárással. Az eljárás a komplex szám kanonikus alakjával tér vissza.

- evalc(");

$$\frac{1}{1+\tan(\alpha)^2} - \frac{\tan(\alpha)^2}{1+\tan(\alpha)^2} + 2\,\frac{I\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}$$

Próbáljuk meg megoldani a már említett ***combine*** eljárás trigonometriai opciója segítségével.

- combine(",trig);

$$\frac{1}{1+\tan(\alpha)^2} - \frac{\tan(\alpha)^2}{1+\tan(\alpha)^2} + 2\,\frac{I\tan(\alpha)}{1+\tan(\alpha)^2}$$

Láthatjuk, hogy nem sokra ment vele a MAPLE.

Segítsünk megoldani a feladatot. Helyettesítsük a *tan(α)* helyére *sin(α)/cos(α)* értéket. Ezt a már ismert ***subs*** eljárással tehetjük meg.

- subs(tan(alpha)=sin(alpha)/cos(alpha),");

$$\frac{1}{1+\dfrac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}} - \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2\left(1+\dfrac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}\right)} + 2\,\frac{I\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)\left(1+\dfrac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}\right)}$$

Egy elég bonyolult kifejezést kaptunk. Próbáljuk meg leegyszerűsíteni a ***normal*** eljárással.

- normal(");

$$-\frac{-\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2-2\,I\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)^2+\sin(\alpha)^2}$$

Egy trigonometriai kifejezést kaptunk. Nézzük, most mit tud ezzel kezdeni a MAPLE.

- combine(",trig);

$$\cos(2\,\alpha)+I\sin(2\,\alpha)$$

Említettük korábban, hogy a ***combine*** eljárás ismer különböző azonosságokat. Most ez nagy segítségünkre volt, hiszen ezzel meg is oldottuk a feladatot.

Most még annyit tehetünk, hogy szétválasztjuk a képzetes részt a valós résztől.

- evalc(Re("));

$$\cos(2\,\alpha)$$

- evalc(Im(""));

$$\sin(2\,\alpha)$$

Most már tényleg készen vagyunk.

6. fealdat

Most nézzünk egy olyan feladatot, ahol kihasználhatjuk, hogy a MAPLE programozható. Adjuk meg azokat a komplex számokat, amelyek konjugáltja az eredeti szám köbe.

$$x := a + I\,b$$

- x:=a+b*I;
- x^3;

$$\text{conjugate}(a + I\,b)$$

- conjugate(x);
- evalc(");

$$a - I\,b$$

- x^3=";

$$(a + I\,b)^3 = a - I\,b$$

- e:=evalc(");

$$e := a^3 - 3\,a\,b^2 + I\left(3\,a^2\,b - b^3\right) = a - I\,b$$

Ezek a lépések azt hiszem már érthetőek. Azt tudjuk, hogy két komplex szám akkor egyenlő, ha a valós és a képzetes rész is egyenlő. Használjuk az eddig megismert függvényeket. Tegyük egyenlővé a valós részeket és a képzetes részeket és tároljuk el ezeket a megfelelő változókban.

- \`valós\`:=evalc(Re(lhs(e))=Re(rhs(e)));

$$\textit{valós} := a^3 - 3\,a\,b^2 = a$$

- \`képzetes\`:=evalc(Im(lhs(e))=Im(rhs(e)));

$$\textit{képzetes} := 3\,a^2\,b - b^3 = -b$$

Láthatjuk, hogy az ***evalc*** eljárással egyben ki is fejtettük a köbös kifejezést.

Most pedig oldjuk meg az egyenlőségeket a ***solve*** eljárással a –ra, b –re.

➢ m:=solve({`valós`,`képzetes`},{a,b});

$$m := \{a=0, b=0\}, \{a=0, b=1\}, \{a=0, b=-1\}, \{b=0, a=1\}, \{b=0, a=-1\}, \left\{b=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+1), a=\frac{1}{2} I \sqrt{2}\right\}, \left\{b=\mathrm{RootOf}(2\,\_Z^2+1), a=-\frac{1}{2} I \sqrt{2}\right\}$$

Az *m* változóban kaptunk halmazok egy sorozatát, amelyek a megoldásokat tartalmazzák. Itt azonban kaptunk olyan értékeket a –ra, b –re, amelyek nem valósak. Mi viszont tudjuk, hogy ezek csak valós értéket vehetnek fel. Ki kellene szűrnünk a valósakat. Itt próbálhatjuk ki a MAPLE programozását.

➢ M:=NULL:

➢ for h in m do

➢ a:='a' ;b:='b': assign(h);

➢ if Im(a)=0 and Im(b)=0 then M:=M,a+b*I fi:

➢ od:

➢ M;

$$0, I, -I, 1, -1$$

Nézzük meg mi is történt.

Első lépésben az *M* értékét kiürítettük.

Utána vizsgáltuk az *m* változóba lévő megoldáshalmazt. Az *a* és *b* változókat felszabadítottuk és megvizsgáltuk, hogy a változók valósak –e. Ugyanis az ***Im*** (a képzetes rész együtthatójával tér vissza) értéke 0 ha nem valós számot vizsgálunk.

Tehát ha a megoldások valósak, akkor kiszámoltuk a komplex szám értékét (*M*), majd kiírattuk. Tehát a feladat megoldása: 0, I, -I, 1, -1.

II. ANALIZIS

1. feladat[3]

Tekintsük a következő függvényt:

$$f := x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 7$$

Határozzuk meg a függvény gyökeit, majd ábrázoljuk úgy, hogy az összes gyöke szerepeljen az ábrán. Végül határozzuk meg az x=0 pontba húzott érintő egyenlettét és ábrázoljuk közös koordinátarendszerbe.

- f:=x^5-5*x^4+5*x^3+7;

$$f := x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 7$$

- solve(f=0,x);

$$\mathrm{RootOf}\left(\_Z^5 - 5\,\_Z^4 + 5\,\_Z^3 + 7\right)$$

Sajnos nem kaptunk zárt formulát, ugyanis az ötöd és annál magasabb fokú polinomokra nincs általános megoldóképlet. Ezt a MAPLE *RootOf* jelöléssel adja tudtunkra. Erre szolgál az ***fsolve*** eljárás, ami a gyökök közelítő értékét adja.

- e:=fsolve(f,x);

$$e := -.8823436323,\ 1.948649428,\ 3.545433483$$

Kaptunk három gyököt. Azt azonban nem árt ellenőrizni, hogy valóban csak három gyök van, ugyanis az ***fsolve*** eljárás nem mindig adja meg az összes gyököt. Az eljárás harmadik paramétereként megadhatunk egy intervallumot, ahol megnézi, hogy van-e gyöke a kifejezésnek. Ehhez azonban meg kellene határoznunk azokat az intervallumokat, ahol gyök található. Erre szolgál a ***realroot*** eljárás. Ez azonban nem standard könyvtári eljárás így a ***readlib*** eljárással aktivizálni kell.

- readlib(realroot):
- n:=numer(f);

$$n := x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 7$$

- realroot(");

$$[[0, 2], [2, 4], [-8, 0]]$$

Láthatjuk, hogy csak három intervallumot talált és ezekben már van egy –egy gyökünk tehát valóban csak ezek léteznek. A függvény ábrázolásához szükségünk lenne arra, hogy tudjuk milyen intervallumon kell ábrázolni. Ehhez szükségünk van a legnagyobb és legkisebb gyök értékére. Ezt a max és min eljárással fogjuk megállapítani a gyökök közül.

- maximum:=max(e);

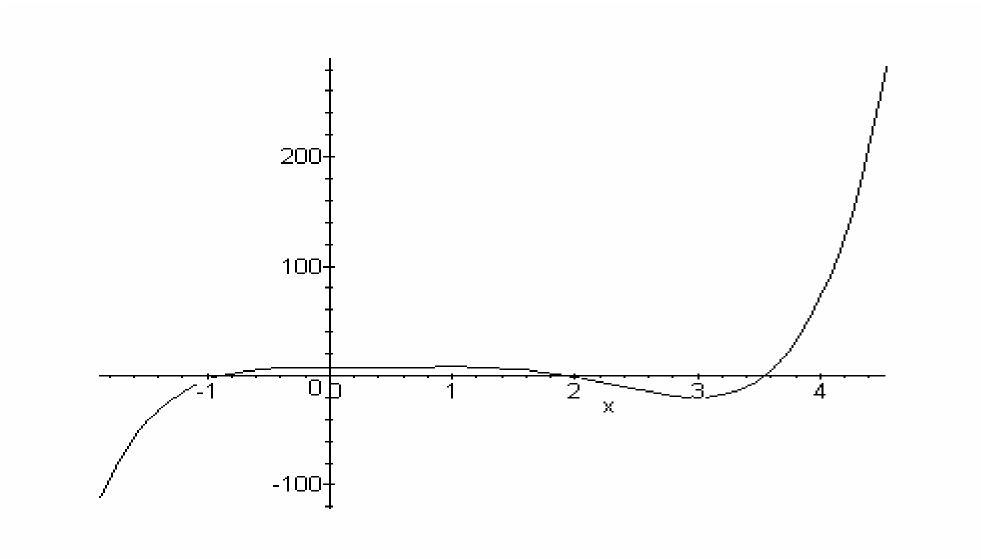
$$maximum := 3.545433483$$

- minimum:=min(e);

$$minimum := -.8823436323$$

Most már ábrázolhatjuk a függvényt!

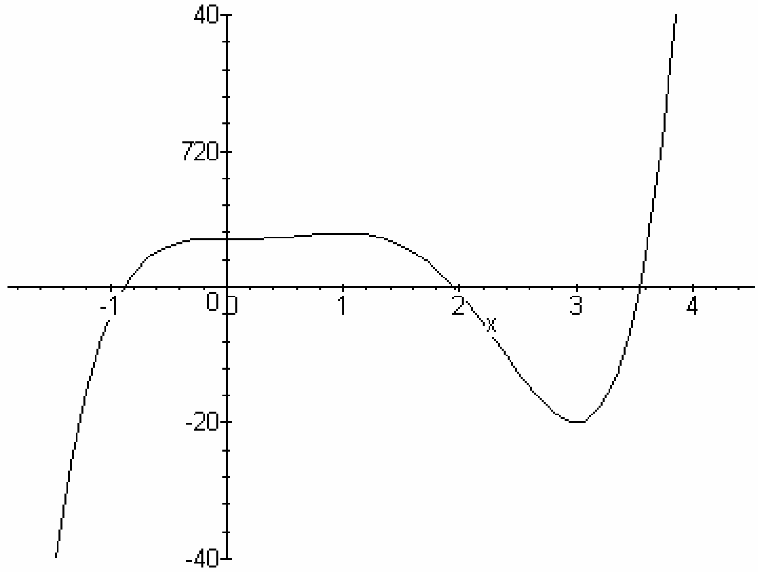
- plot(f,x=minimum-1..maximum+1);



Hát nem lett valami szép a függvény. A ***plot*** eljárás még nagyon sok opció beállítását teszi lehetővé.

Állítsuk be az y tengely is az intervallumot.

➢ plot(f,plot(f,x=minimum-1..maximum+1,y=-40..40);



Ez már így sokkal jobb. Most határozzuk meg a nulla pontba húzott érintő egyenletét, majd rajzoljuk közös ábrára az eredeti függvényünkkel. Ehhez ismernünk kell az érintő iránytangesét, ez pedig a függvény deriváltjának a helyettesítési értéke az adott pontban.

➢ dfdx:=diff(f,x);

$$dfdx := 5\,x^4 - 20\,x^3 + 15\,x^2$$

A diff eljárás az *f* kifejezés *x* szerinti deriváltját állította elő.

Most pedig számítsuk ki a helyettesítési értéket az x=0 pontban.

➢ t:=subs(x=0,dfdx);

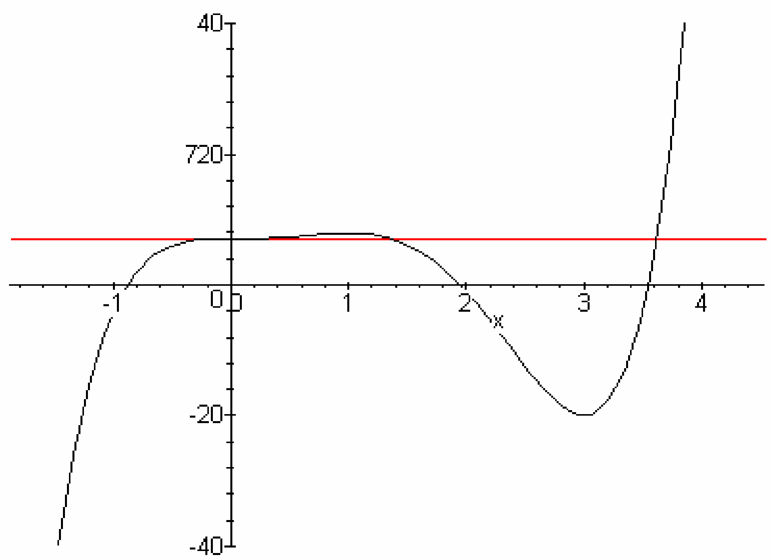
$$t := 0$$

Ez az érték már megmutatja nekünk, hogy az érintő párhuzamos lesz az x – tengellyel. Írjuk fel az egyenletét, majd ábrázoljuk.

➢ y:=subs(x=0,f)+t*(x-0);

$$y := 7$$

➢ plot({f,y},x=minimum-1..maximum+1,y=-40..40);



2. feladat[3]

Elemezzük a következő függvényt: $f(x)=2x^4-4x^3-11x^2+8x+4$

Először is határozzuk meg, milyen tulajdonságokat vizsgáljuk a függvényen. Az általános fügvénydiszkuszió lépései a következőek: értelmezési tartomány meghatározása; zérushelyek keresése; a függvény paritásának, periociditásának vizsgálata; folytonosság vizsgálata; határérték vizsgálata; szélsőérték és monotonitás vizsgálata; konvexség, konkávság, inflexiós pontok vizsgálata; értékkészlet meghatározása; a függvény grafikonjának a felrajzolása.

Határozzuk meg először a függvény értelmezési tartományát. $D_f = (-\infty, \infty)$, azaz a valós számok halmaza. Most pedig kezdjük el a MAPLE segítségével a többi vizsgálatot.

➢ f:=2*x^4-4*x^3-11*x^2+8*x+4;

$$f := 2\,x^4 - 4\,x^3 - 11\,x^2 + 8\,x + 4$$

Nézzük meg a zérushelyeit a már jól ismert ***solve*** eljárással!

➢ solve(f,x);

$$\mathrm{RootOf}\left(2\,\_Z^4 - 4\,\_Z^3 - 11\,\_Z^2 + 8\,\_Z + 4\right)$$

A már ismert probléma. Keressük meg a közelítő értékeket!

- zer:=fsolve(f,x);

$$zer := -1.842824848, -.3538836687, .9423737779, 3.254334739$$

Az ugye egyértelmű, hogy nem periodikus a függvény. De mi a helyzet a paritással? Egy függvény akkor páros, ha f(-x) = f(x); páratlan, ha f(x) = -f(x). Nézzük meg, hogy teljesül-e ez a mi esetünkben. Ezt a már használt ***testeq*** eljárással érthetjük el.

- testeq(f,subs((x=-x),f));

$$\text{false}$$

- testeq(f,-f);

$$\text{false}$$

Mint láthatjuk egyik eset sem teljesült, ezért a függvényünk se nem páros, se nem páratlan.

Most vizsgáljuk meg a függvény folytonosságát! Ezt az ***iscont*** eljárással tehetjük meg. Ez az eljárás sem tartozik a standard könyvtári eljárások közé, ezért ezt is meg kell hívnunk.

- readlib(iscont):
- iscont(f,x=-infinity..infinity);

$$\text{true}$$

A visszatérési értéke true, vagyis a függvény folytonos az egész értelmezési tartományon.

Most vizsgáljuk meg a határértéket. Ezt a ***limit*** eljárás segítségével tudjuk megtenni a MAPLE –ban. Használjuk egyszerre a csendes formájával az eljárást.

- Limit(f,x=infinity)=limit(f,x=infinity);

$$\lim_{x \to \infty} 2x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = \infty$$

- Limit(f,x=-infinity)=limit(f,x=-infinity);

$$\lim_{x \to (-\infty)} 2x^4 - 4x^3 - 11x^2 + 8x + 4 = \infty$$

Tehát az eredmény mind a két esetben ∞, azaz a függvény a plusz és a mínusz végtelenben is a plusz végtelenbe konvergál.

Tudjuk, hogy a szélsőérték, a monotonitás, a konvexség, konkávság, az inflexiós pontok meghatározásához szükségünk van a függvény első, második, harmadik derivált függvényére. Szerencsére ennek meghatározásaiban is segítségünkre lesz a MAPLE. Ezt a ***diff*** eljárás segítségével tudjuk elérni.

- dfdx1:=diff(f,x);

$$dfdx1 := 8\,x^3 - 12\,x^2 - 22\,x + 8$$

- dfdx2:=diff(",x);

$$dfdx2 := 24\,x^2 - 24\,x - 22$$

- dfdx3:=diff(",x);

$$dfdx3 := 48\,x - 24$$

A helyi szélsőérték létezésének szükséges feltétele, hogy az adott helyen a függvény első deriváltja nulla legyen. Ez azonban még kevés, hogy szélsőérték legyen a pontban. Ahhoz még az is kell, hogy a pontban a második derivált értéke ne legyen nulla.

Nézzük meg ezeknek a feltételeknek mely pontok felelnek meg.

- hsz:=fsolve(dfdx1=0,x);

$$hsz := -1.274182958, .3197554860, 2.454427472$$

- subs(x=hsz[1],dfdx2); subs(x=hsz[2],dfdx2);subs(x=hsz[3],dfdx2);

$$-27.22028597$$

$$63.67488187$$

Tehát a függvénynek három helyi szélsőértéke van, mégpedig két minimuma és egy maximuma.

Számoljuk ki a függvény helyettesítési értékekeit ezekben a pontokban:

- sze1:=subs(x=hsz[1],f);

$$sze1 := -10.50589009$$

- sze2:=subs(x=hsz[2],f);

$$sze2 := 5.323500334$$

- sze3:=subs(x=hsz[3],f);

$$sze3 := -29.19261025$$

Most határozzuk meg az inflexiós pontokat, ha léteznek. Ennek szükséges feltétele, hogy a második derivált értéke nulla legyen. Ahhoz, hogy a függvénynek az adott pontban valóban legyen inflexiós pontja, hogy a harmadik derivált a pontban felvett érétke nullától különböző legyen.

Vizsgáljuk meg ilyen szempontok alapján a függvényünket:

- inf:=solve(dfdx2,x);

$$inf := \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{42}, \frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{42}$$

- subs(x=inf[1],dfdx3); subs(x=inf[2],dfdx3);

$$8\sqrt{42} \qquad\qquad -8\sqrt{42}$$

Tehát a függvényünknek két inflexiós pontja van. Nézzük meg, milyen értékeket vesz fel a függvény ezekben a pontokban:

- inf1:=evalf(subs(x=inf[1],f));

$$inf1 := -14.13672838$$

- inf2:=evalf(subs(x=inf[2],f));

$$inf2 := -3.335493861$$

Most már csak a függvény értékkészletének a meghatározására van szükségünk. Ezt a következőképpen tehetjük meg:

➢ Min:=minimize(f,x,infinite);

$$Min := -7\,\mathrm{RootOf}\left(4\,\_Z^3 - 6\,\_Z^2 - 11\,\_Z + 4, 2.454427472\right)^2 + \frac{13}{4}\,\mathrm{RootOf}\left(4\,\_Z^3 - 6\,\_Z^2 - 11\,\_Z + 4, 2.454427472\right) + 5$$

Közelítsük az értéket.

➢ Min:=evalf(");

$$Min := -29.19261023$$

Most nézzük meg a maximumát is, bár tudjuk, hogy a függvényérték a végtelenbe tart.

➢ maximize(f,x,infinite);

$$\infty$$

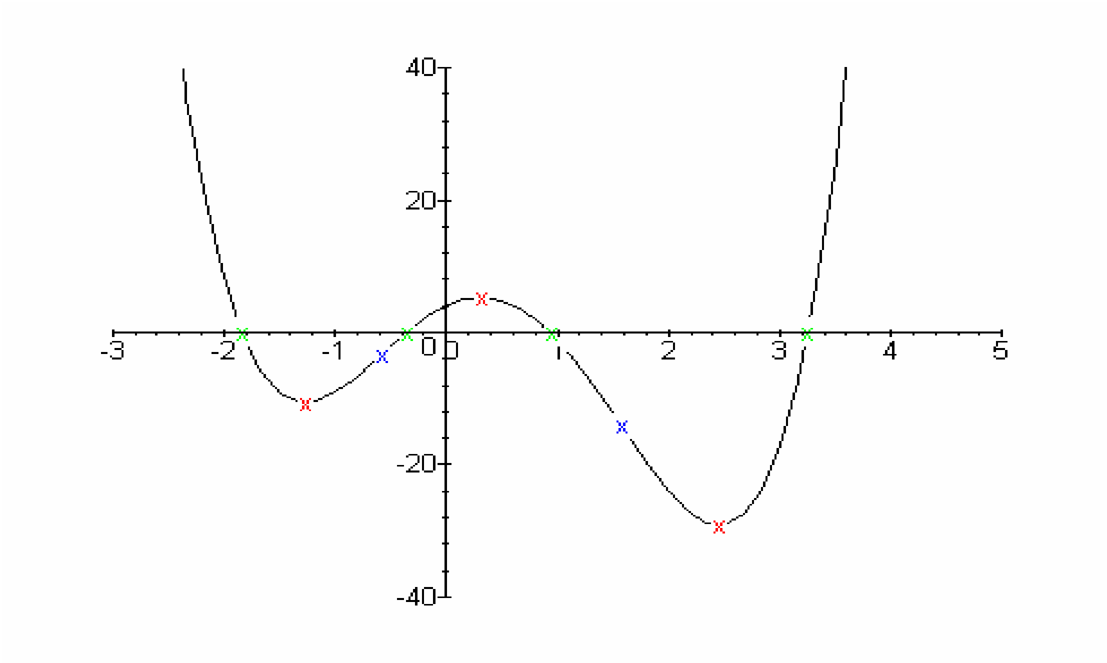
Most már lényegében mindent tudunk a függvényről. Már csak ábrázolni kell. Előtte azonban foglaljuk táblázatba a megállapításainkat:

x	x<-1.3	x=-1.3	-1.3<x<-0.6	x=-0.6	-0.6<x<0.3	x=0.3	0.3<x<1.6	x=1.6	1.6<x<2.5	x=2.5	x<2.5
f'''(x)				-				+			
f''(x)	+	+	+	0	-	-	-	0	+	+	+
f'(x)	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
f(x)	↗	h. min	↘	inf.	↘	h. max	↗	inf.	↗	h. min	↘
	konvex				konkáv				konvex		

A hiányzó adatokat az ***evalf(subs(x=?,dfdx?));*** segítségével számolhattuk ki. A kérdőjelek a megfelelő helyettesítési értékeket és a megfelelő deriváltakat jelenti.

Most pedig ábrázoljuk a függvényt. Ezt úgy tesszük meg, hogy a függvényen ábrázoljuk a zérushelyeket a helyi szélsőértékeket és az inflexiós pontokat is. Ezt a ***plots*** csomag ***textplot*** eljárással fogjuk megtenni. Ezzel bármilyen szöveget bárhova be lehet helyezni az ábrába. Az ábrázoláshoz még szükségünk van a ***display*** eljárásra, amivel egyszerre több és többfajta ***plots*** struktúrát is meg tudunk jeleníteni. Nézzük, hogyan tudjuk ezt megtenni:

- with(plots):
- f2:=textplot([[inf[1],inf1,`x`],[inf[2],inf2,`x`]],color=blue):
- f3:=plot(f,x=-3..5,y=-40..40):
- f4:=textplot([[hsz[1],sze1,`x`],[hsz[2],sze2,`x`],[hsz[3],sze3,`x`]],color=red):
- f5:=textplot([[zer[1],0,`x`],[zer[2],0,`x`],[zer[3],0,`x`],[zer[4],0,`x`]],color=green):
- display({f2,f3,f4,f5});



3. feladat[3]

Most nézzünk egy másik függvényt:

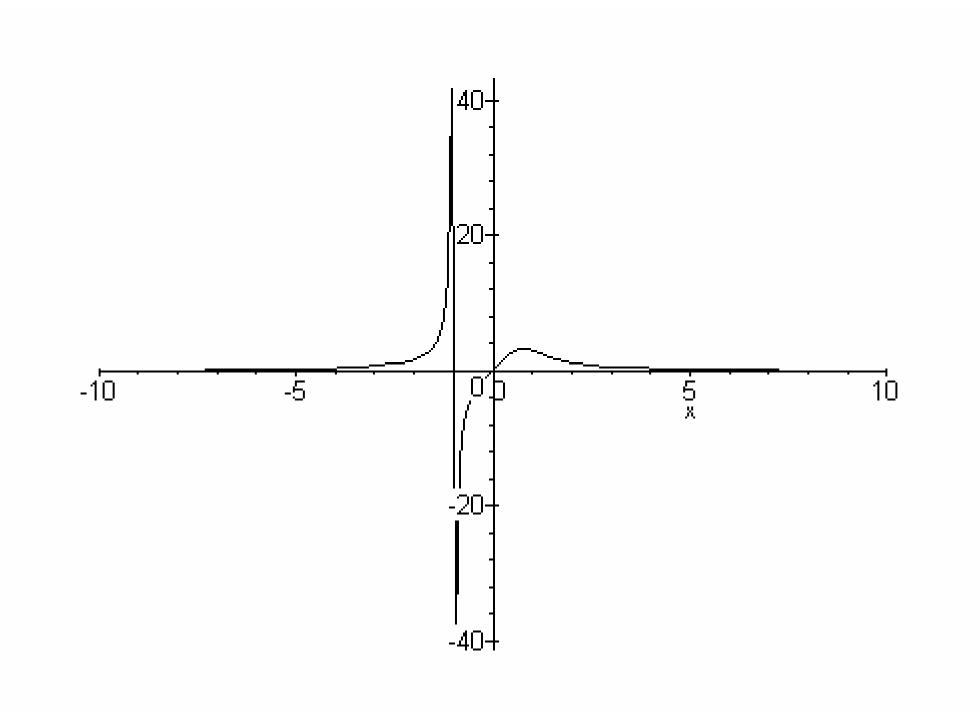
$$f := 6\,\frac{x}{x^3+1}$$

Tudjuk, hogy egy függvényt rendesen csak függvénydiszkusszió után tudunk ábrázolni. Viszont a MAPLE természetesen ezt enélkül is tudja. Ez nagy segítséget jelent a diszkusszió során, hiszen az ábráról rengeteg minden leolvasható. Tehát most ábrázoljuk először a függvényt.

- f:=6*x/(x^3+1);

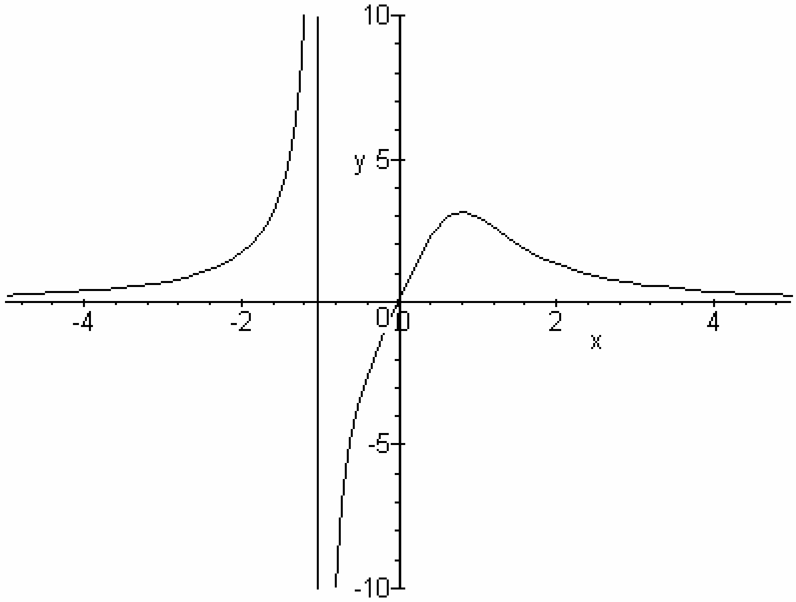
$$f := 6\,\frac{x}{x^3+1}$$

- plot(f,x=-10..10);



Erről az ábráról is sok minden látszik, azonban próbáljuk meg finomítani az intervallumokat.

➤ plot(f,x=-5..5,y=-10..10);



Ez már így sokkal jobb! Innen egyből le tudjuk olvasni, hogy a függvénynek egy zérus helye van a nulla pontban. Továbbá az is, hogy van egy szakadási helye a –1 helyen. Ezt azonban ellenőrizzük is le, a ***discont*** eljárással, mivel ezt az eljárást még úgyse vettük.

➤ readlib(discont): discont(f,x);

$$\{-1\}$$

Valóban a –1 helyen van a szakadási helye.. Ez az eljárás sem tartozik a standard eljárások közé, így ezt is aktivizálni kellett a használat előtt.

A többi helyen viszont a függvény folytonos. Azt is láthatjuk az ábrán, hogy ha az x érétkei a plusz illetve a mínusz végtelenhez tartanak, akkor a függvény értékek tartanak a nullához. Mi van azonban ha az x a (–1) –hez tart. Próbáljuk ki itt is az előbb megismert ***limit*** függvényt.

➤ limit(f,x=-1);

$$\mathit{undefined}$$

Nem jutottunk eredményre. Szerencsére ezt a problémát is tudja kezelni a MAPLE. Mégpedig úgy, hogy a ***limit*** eljárásnak meg lehet olyan paramétert adni, hogy merről vizsgálja a határértéket, vagyis a bal oldali határértéket a ***left***, a jobb oldali határértéket a ***right*** paraméterrel fogja vizsgálni.

- limit(f,x=-1,left); limit(f,x=-1,right);

$$\infty \qquad\qquad -\infty$$

Vagyis a bal oldali határérték (–1) –ben plusz végtelen, a jobb mínusz végtelen. Ebből és az ábrából kiderül, hogy az értékkészlet a valós számok halmaza. Az előbb már azt is megállapítottuk, hogy az értelmezési tartomány is a valós számok halmaza kivéve a (–1) –et. Az ábrán látható, hogy a (0,2) intervallumon helyi maximuma van a függvénynek. Ezt a maximize eljárással tudjuk megnézni a megfelelő intervallum megadásával. Ezzel azonban nem adhatjuk, meg 100% biztonsággal a maximumhelyet.

- maximize(f,x,{x=0..2});

$$\infty$$

Nem is kaptunk megfelelő eredményt. Határozzuk meg az előbbiekhez hasonlóan a szélsőértékeket.

- hsz:=solve(diff(f,x),x);

$$hsz := \frac{1}{2}\,2^{2/3},\ -\frac{1}{4}\,2^{2/3} + \frac{1}{4}\,I\sqrt{3}\,2^{2/3},\ -\frac{1}{4}\,2^{2/3} - \frac{1}{4}\,I\sqrt{3}\,2^{2/3}$$

Láthatjuk, hogy ebből csak az első érték a valós, tehát csak egy helyi szélső értéke lehet a függvénynek, mint ahogy az az ábrán is látszik. Azért ellenőrizzük a második deriváltat, hogy nem –e nulla.

- subs(x=hsz[1],diff(diff(f,x),x));

$$-8\,2^{1/3}$$

Valóban nem nulla tehát valóban van helyi maximuma az első értéknél. Nézzük meg van –e inflexiós pontja a függvénynek.

➢ inf:=solve((diff(diff(f,x),x)),x);

$$inf := 0, 0, 2^{1/3}, -\frac{1}{2}2^{1/3} + \frac{1}{2}I\,2^{1/3}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}2^{1/3} - \frac{1}{2}I\,2^{1/3}\sqrt{3}$$

Itt is csak az első három esetet kell vizsgálni, mert azok a valósak. Ráadásul két gyök egybeesik így csak két esetet kell vizsgálnunk. Nézzük meg a harmadik deriváltat a helyettesítési helyeken.

➢ inf1:=subs(x=0,diff(diff(diff(f,x),x),x));

$$inf1 := 0$$

➢ inf2:=subs(x=inf[3],diff(diff(diff(f,x),x),x));

$$inf2 := 8\,2^{1/3}$$

Itt csak a második esetben van inflexiós pont. Ezt láthattuk az ábrán is.

Tehát a függvény alulról nézve (-∞,-1) intervallumon konkáv, -1-től az inflexiós pontig konvex, és az inflexiós ponttól +∞ -ig konkáv. A monotonitás is leolvashtó az ábráról. (-∞,-1) intervallumon monoton nő, ezután (–1,helyi maximum] szintén nő, majd maximumtól kezdve csökken.

Ezzel be is fejeztük a diszkussziót, ha nem is volt olyan pontos, mint az előző feladatban, de azért sikerült mindent meghatároznunk.

III. Geometria

1. feladat

Írjuk fel annak a körnek az egyenletét, amely áthalad a P1(4;-1) és a P2(-3;-2) pontokon, és az x koodinátatengelyt érinti. A kor középpontjának a koordinátái legyenek (u;v). Ekkor mivel a kör alulról érinti az x egyenest, ezért a kör sugara v lesz. Vegyük föl a kör egyenletét:

- k:=(x-u)^2+(y-v)^2=v^2;

$$k := (x-u)^2 + (y-v)^2 = v^2$$

A P1 és a P2 pont rajta van a körön, tehát a koordinátáit behelyetesíthetjük a kör egyenletébe:

- k1:=subs({x=4,y=-1},k);

$$k1 := (4-u)^2 + (-1-v)^2 = v^2$$

- k2:=subs({x=-3,y=-2},k);

$$k2 := (-3-u)^2 + (-2-v)^2 = v^2$$

Kaptunk egy kétismeretlenes egyenletrendszer, amit már könnyedén meg tudunk oldani a ***solve*** eljárással.

- m:=solve({k1,k2},{u,v});

$$m := \{u = 1, v = -5\}, \{u = 21, v = -145\}$$

Kaptunk két megoldást. Határozzuk meg a két kör egyenletét.

- kor1:=subs(m[1],k);

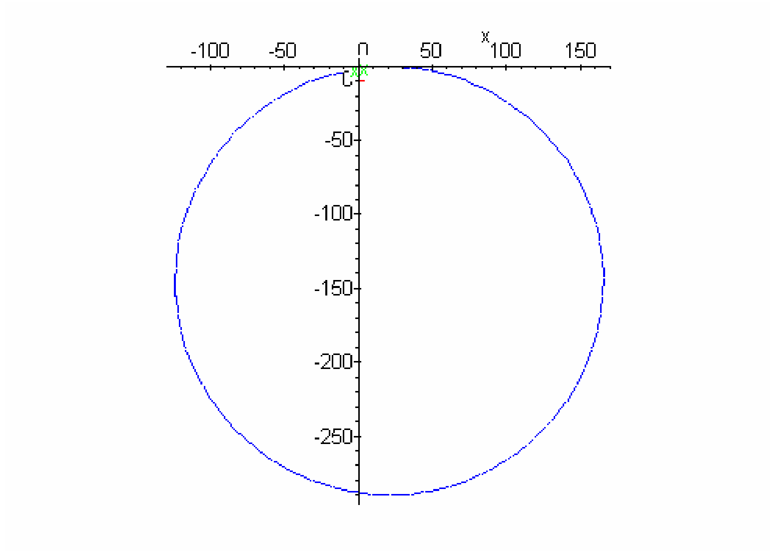
$$kor1 := (x-1)^2 + (y+5)^2 = 25$$

- kor2:=subs(m[2],k);

$$kor2 := (x-21)^2 + (y+145)^2 = 21025$$

Most már csak fel kell rajzolnunk a köröket, és készen vagyunk.

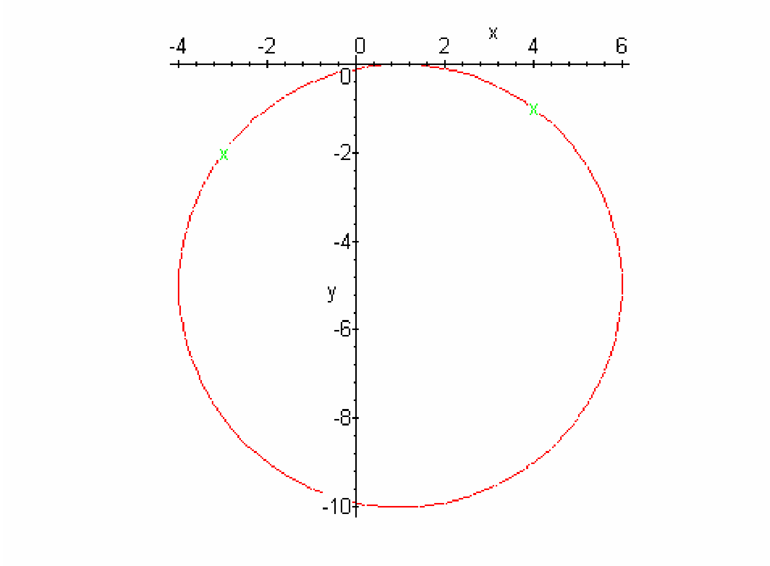
- with(plots):
- K1:=implicitplot(kor2,x=-150..180,y=-300..2,color=blue):
- K2:=implicitplot(kor1,x=-7..8,y=-10..2,color=red):
- p1:=textplot([[4,-1,`x`],[-3,2,`x`]],color=green):
- display([K1,K2,p1],scaling=constrained);



Az ***implicit*** eljárás arra szolgál, hogy az implicit alakban megadott függvényeket is tudjuk ábrázolni. A ***scaling*** paraméterről még nem esett szó. Ez arra szolgál, hogy meg tudjuk adni az x – és y –tengely beosztásának arányát. A ***constrained*** esetében ez a beosztás 1:1, vagyis mind a két tengelyen egyforma.

Sajnos a két kör között lévő különbség miatt nem látható a másik megoldás. Rajzoljuk fel egy külön ábrán.

- display([K2,p1],scaling=constrained);



2. feladat[2]

Igazoljuk, hogy a síkbeli polárkoordinátákban az adott
egyenlet kört határoz meg.

$$r = 2\sin(\theta)$$

Először nézzük mit is jelent a polárkoordináta –rendszer. A polárkoordináta-rendszerben egy P pontot az (r,θ) valós számpárral adunk meg. Ehhez szükséges egy O kezdőpontú félegyenes, amit polártengelynek, az O –t pedig pólusnak nevezünk. Ehhez viszonyítjuk a pontokat úgy, hogy az r a pólustól való távolságot a θ pedig a polártengely és az OP által bezárt szöget jelenti radiánban.

2.a megoldás

A feladat megoldásához szükségünk van arra, hogy hogyan lehet áttérni a polár-kordinátákról derékszögű koordinátákra. Ugyanis egyenlőre csak a derékszögű koordinátákkal tudjuk megadni a kör egyenletét. Helyezzük a polárkoordináta –rendszert egy derékszögű koordinátarendszerre úgy, hogy az origó és a pólus egybeessen és a polártengely illeszkedjen az x –tengely pozitív felére. Ekkor a P(x,y) koordinátákról a P(r, θ) számpárra a következő módon térhetünk át: x=r*cos(θ), y=r*sin(θ).Ezt egy derékszögű háromszögből könnyen meghatározhattuk. Azonban nekünk az áttérés fordítva kell, vagyis

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Hogy is kaptuk ezt meg? Vezessük le a megoldást!

Vegyük fel először az egyenleteket:

- egyenlet1:=x=r*cos(theta); egyenlet2:=y=r*sin(theta);

$$egyenlet1 := x = r\cos(\theta)$$

$$egyenlet2 := y = r\sin(\theta)$$

- map(x->x^2,egyenlet1)+map(x->x^2,egyenlet2);

$$x^2 + y^2 = r^2\cos(\theta)^2 + r^2\sin(\theta)^2$$

Ez a lépés némi magyarázatra szorul. Itt a ***map*** eljárást használtuk, ami veszi az eljárás első argomentumában szereplő függvényt, és a kifejezés minden összetevőjére alkalmazza azt. Itt tehát a következő történt: a map eljárás vette az *egyenletek* összetevőit, vagyis a bal és jobb oldalt, majd négyzetre emelte. Eztután összeadta a két egyenletet. A visszatérési értéke szintén egy egyenlet volt, hiszen a map eljárás mindig a *kifejezés* típusával tér vissza, és itt a *kifejezés* egyenlet volt. Egyszerűsítsük az egyenletet a ***simplify*** eljárással.

- simplify(");

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Máris megkaptuk az egyik áttérési képletet. Még egy kis átalakítás és ugyan olyan formában is lesz.

- map(sqrt,");

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r$$

- simplify(",assume=positive);

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{r^2}$$

Most már tényleg elértük a kívánt eredményt. Nézzük, hogyan kaphatnánk meg a másik áttérési képletet is. Osszuk el az egyenletek megfelelő oldalait egymással.

- lhs(egyenlet2)/lhs(egyenlet1)=rhs(egyenlet2)/rhs(egyenlet1);

$$\frac{y}{x} = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$$

Használjuk ismét a ***map*** eljárást és alkalmazzuk az arkusztangens függvényt a kapott egyenlet mindkét oldalára.

- map(arctan,");

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}\right)$$

Megkaptuk a másik áttérési képletet is. Alakítsuk ezt is az eredeti formára, hiszen itt már csak egy behelyettesítést kell elvégeznünk. Helyettesítsük a sin/cos a tan függvénnyel.

$$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan(\tan(\theta))$$

- student[powsubs](sin(theta)/cos(theta)=tan(theta),");

A helyettesítést a ***powsubs*** eljárással végeztük, ami a ***student*** csomagban található. Amit láttunk az a másik megadási formája a nem standard eljárásoknak, amikor nem az egész csomagot hívjuk meg csak azt az egy eljárást. A ***powsubs*** eljárás a helyettesítést nem belső ábrázolás alapján, hanem algebrai értelemben vett részkifejezésekre végzi el. Azonban a MAPLE automatikus egyszerűsítési mechanizmusa nem vette észre, hogy az ***arctan(tan(θ)=θ.*** Alakítsuk a jobb oldali összetett kifejezést függvénnyé alakítani, majd egyszerűsítsük le.

- rhs(")=unapply(rhs("),theta);

$$\arctan(\tan(\theta)) = \arctan@\tan$$

Használtunk itt egy új unapply(kifejezés, változó) nevű eljárást. Az eljárás arra szolgál, hogy a megadott változóval, mint független változóval egy olyan függvényobjektumot képezünk, amelynek értékét az adott kifejezéssel kell kiszámítani. Itt is erre számítottunk, de az eljárás egy összetett függvényt képezett, amit a @ jellel jelöli a MAPLE. Próbáljuk ki újra a ***simplify*** eljárást az ***atsign*** paraméterrel, ami így az összetett függvények egyszerűsítésére szolgál.

- simplify(",atsign);

$$\arctan(\tan(\theta)) = (x \rightarrow x)$$

Az eredményként egy identikus függvényt kaptunk. Persze azt tudjuk, hogy az arctan(tan(x) nincs mindenhol értelmezve és a függvény is csak a -π/2 és π/2 közötti értékeket veszi fel.

Most már neki kezdhetünk a tényleges feladat megoldáshoz.

- kor:=r=2*sin(theta);

$$kor := r = 2\sin(\theta)$$

Helyettesítsük be az áttérési képleteket.

➢ subs({r=sqrt(x^2+y^2),theta=arctan(y/x)},kor);

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\sin\left(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Most már „csak" annyi a feladatunk, hogy ezt a kifejezést $(x-v)^2+(y-v)^2=r^2$ formájúra alakítsuk! Egyszerűsítsük a kifejezésben szereplő trigonometrikus kifejezést a simplify eljárással:

➢ simplify(");

$$\sqrt{x^2+y^2} = 2\,\frac{y}{x\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{x^2}}}$$

Emeljük négyzetre az egyenlet mindkét oldalát:

➢ map(t->t^2,");

$$x^2+y^2 = 4\,\frac{y^2}{x^2+y^2}$$

Fejezzük ki az egyenletből az x^2+y^2 –et. Ehhez egy új eljárást az isolate kell használnunk. Ez az eljárás egy megadott részkifejezést fejez ki a megadott egyenletből. Természetesen ez se egy standard eljárás így ezt is meg kell hívni.

➢ readlib(isolate):

➢ kor:=isolate("",x^2+y^2);

$$kor := x^2+y^2 = -2\,y$$

Alakítsuk teljes négyzetté a kifejezést y –ra nézve. Ehhez először nullára kell rendezni az egyenletet. Ezt megtehetnénk az ismert map függvénnyel. Ez azért szükséges, mert a teljes négyzeté alakítást végző completesquare eljárás csak az egy oldalon lévő változókkal tud dolgozni. Mi azonban most nem a map eljárást használjuk, hanem az eljárás végrehajtása közben az egyenlet mindkét oldalához hozzáadunk 2y –t.

➢ kor:=student[completesquare](kor+(2*y=2*y),y);

$$kor := (y+1)^2 - 1 + x^2 = 0$$

Most már csak az egyenlet rendezése a ránk váró feladat

➢ kor:=kor+(1=1);

$$kor := (y+1)^2 + x^2 = 1$$

Ezzel megoldottuk a feladatot. Olvassuk le, hogy hol helyezkedik el a kör. A középpontja a (0,1) pont, a sugara pedig 1. Vagyis a kör érinti az x –tengelyt az y –tengely pedig tükörtengelye.

2.b megoldás

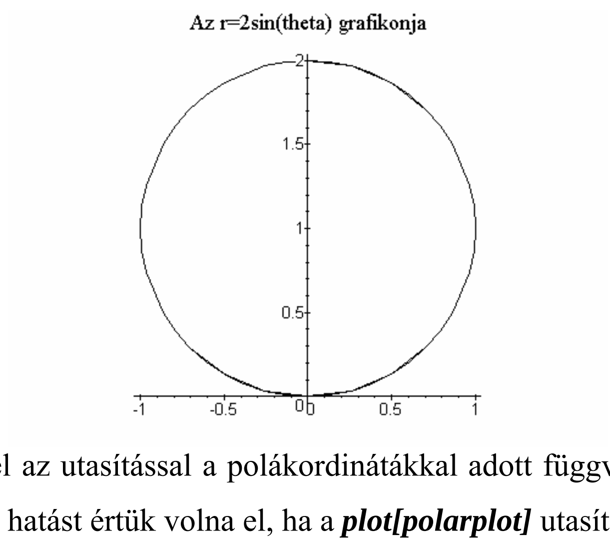
Nézzük meg, hogy hogyan lehetett volna ezt a feladatot egyszerűbben megoldani. Ha tudjuk a MAPLE segítségével polárkordináta –rendszerben ábrázolni a megadott feladatott, akkor minden számolgatás és átalakítás nélkül ránézésre meg tudjuk állapítani, hogy a feladatban megadott egyenlet kört határoz –e meg. Nézzük, hogyan lehet ezt megoldani, hiszen a MAPLE képes erre.

➢ r:=theta->2*sin(theta);

$$r := \theta \to 2\sin(\theta)$$

➢ plot([r(theta),theta,theta=0..2*Pi],coords=polar,

➢ title=`Az r=2sin(theta) grafikonja`,scaling=CONSTRAINED);



Ezzel az utasítással a polákordinátákkal adott függvényeket rajzolhatunk fel. Ugyan ezt a hatást értük volna el, ha a ***plot[polarplot]*** utasítást adtuk volna ki.

Most valóban meg tudjuk állapítani ránézésre, hogy a feladatban megadott egyenlet valóban egy kör egyenlete polárkoordinátákban megadva.

Összefoglalás

Ennyit sikerült felvillantani a MAPLE nyújtotta szolgáltatásokból. Az összes lehetőség felsoroláshoz egy több száz oldalas könyv sem lenne elég, azonban remélem, hogy ennyiből is látható, hogy milyen jól használható a program a matematika oktatásában. A feladatokon keresztül láthatóvá vált, hogy milyen széles körben lehet remekül használni (kihasználni) a program adta lehetőségeket. Nyilván a felhasználás köre sokkal bővebb, hiszen a feladattípusok minden körét nem volt lehetőségem érinteni, de talán ennyiből is felmérhető, hogy milyen „végtelen" lehetőségeket rejt még a program.

Azonban nem kell megijedni. Matematika órához szükséges ismeretek gyorsan és könnyedén elsajátíthatók, de nem szabad elfelejteni, hogy a program nem helyettesíti a tanulást. Az egyes technikák, feladat-megoldási algoritmusokat ugyanúgy el kell sajátítani, azonban ezek ellenőrzését illetve az egyes részszámítások elvégzését nyugodtan rá lehet bízni a programra.

Nyugodtan lehet használni komolyabb tudományos kutatásokhoz, munkához is, ahol már egyes bonyolultabb számítások eredményei a fontosok. A program ezekkel is remekül elboldogult, de ehhez néha már magasabb matematikai ismeretekre vagy programozói ismeretekre is szükség lehet.

Remélem sikerült felkeltenem az érdeklődés a MAPLE iránt és ezáltal egy hasznos program további önálló felfedezéséhez nyújtottam segítséget.

Felhasznált irodalom

1. Molnárka – Gergó – Wettl – Horváth – Kallós : A MAPLE V és alkalmazásai
2. Kilincsik – Maróti : MAPLE 8 tételben
3. Leindler László : Analízis
4. Blázsovics József : Ötösöm lesz matematikából / Példatár /